Teoría de Conjuntos
Definiciones Básicas

Conjunto

Definición

- Un conjunto es una colección o familia de objetos.
- Las llaves { } tendrán un uso muy especial y único: servirán para definir un conjunto. Para ninguna otra cosa más.

Formas de Construir o Definir Conjuntos

Manejaremos dos formas de construir conjuntos:

- Definición de un conjunto por extensión.
- Definición de un conjunto por intención.

Definición por Extensión

Definición

- Construir o definir un conjunto por extensión consiste en declarar todos lo elementos que lo forman.

Ejemplo

{Rosana, Sakura, María del Carmen, Vito Corleone, Pedro }

Definición por Intención

Definición

- Construir o definir un conjunto por intención consiste en declarar cuáles elementos de un cierto conjunto son seleccionados. Esto se lleva a cabo por una propiedad o predicado *P(x).*

$$\{x \in D | P(x)\}$$

Ejemplo

$$\{x \in \boldsymbol{R} | -2 < x\}$$

“Todos aquellos números reales que son mayores que -2.”

$x \in A$

Definición

- Un objeto *x se dice pertenecer o ser elemento o* estar en un conjunto *A si*
  - cuando el conjunto *A está definido por extensión* (cuando el elemento *x aparece en la lista d*eelementos del conjunto *A)*
  - cuando el conjunto *A está definido por intención (*cuando el elemento *x es tomado del universo del* discurso y cumple la propiedad establecida para *A)*

Ejemplo

A = { Rosana, Sakura, María del Carmen, Vito Corleone, Pedro}

- Jonas $\notin A$
- Pedro $\in A$

$x \in A$

Ejemplo

- Indique cuáles opciones contienen elementos del conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\}$$

a) 3 $\quad 3 \in A$ *pues 3 es entero y cumple* $-2 < 3 < 5$

b) 6 $\quad 6 \notin A$ *pues* $-2 < 6 \not< 5$

c) -3 $\quad -3 \notin A$ *pues* $-2 \not< -3 < 5$

d) 1.5 $\quad 1.5 \notin A$ *pues 1.5 no es entero.*

Definición de Subconjunto

Definición

- Diremos que un conjunto *A es un subconjunto de* el conjunto *B y lo simbolizaremos*

$$A \subseteq B$$

si todo elemento de *A es también elemento de B.*

- Observe que de la definición se tiene la siguiente equivalencia:

$$A \subseteq B \equiv \forall x, x \in A \rightarrow x \in B$$

Y negando lo anterior:

$$A \nsubseteq B \equiv \exists x, x \in A \wedge x \notin B$$

Definición de Subconjunto

Ejemplo

En referencia a los conjuntos:

N El conjunto de los números enteros positivos

Z El conjunto de los enteros

R El conjunto de los números reales

Q El conjunto de los números racionales o fraccionarios

Se tiene:

1. $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$
2. $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$
3. $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$
4. $\mathbf{Z} \nsubseteq \mathbf{N}$
5. $\mathbf{Q} \nsubseteq \mathbf{Z}$
6. $\mathbf{R} \nsubseteq \mathbf{Q}$

Definición de Subconjunto Propio

Definición

- Diremos que un conjunto *A es un* subconjunto propio de el conjunto *B y lo simbolizaremos*

$$A \subset B$$

si todo elemento de *A es también elemento de B y* además existe un elemento de *b que no es* elemento de *A.*

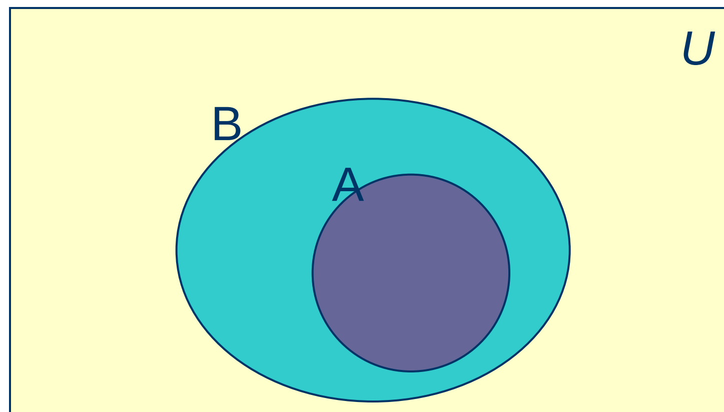
$$A \subset B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \not\subseteq A)$$

Subconjunto propio

- Subconjunto propio.

$$A \subset B$$

Todos los elementos de A están en B y al menos un elemento de B no está en A.



El conjunto Vacío

Definición

- El conjunto que no tiene ningún elemento se llamará el conjunto vacío.

Y se simbolizará por:

$$\emptyset$$

Operaciones entre conjuntos

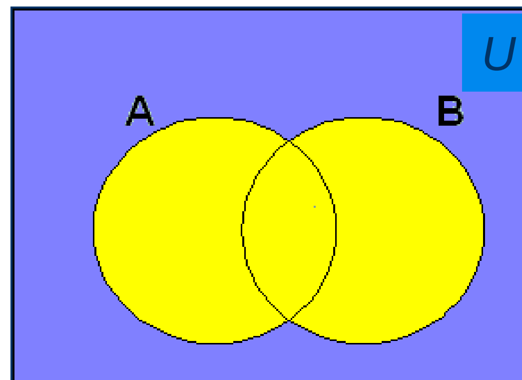
- Unión.

$$A \cup B$$

$$x \in A \cup B \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$$

Evento que consiste en los elementos que están en A, en B o en ambos.

Diagrama de Venn



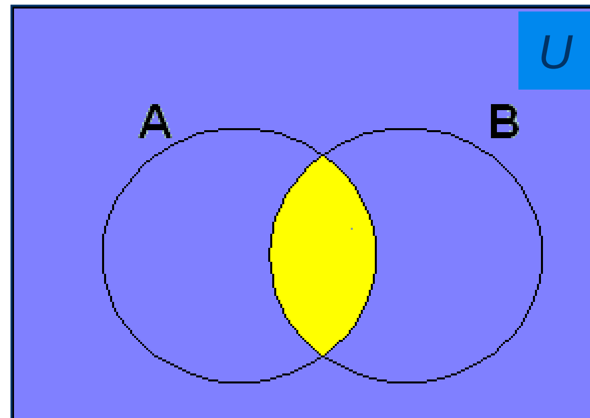
Operaciones entre conjuntos

- Intersección.

$$A \cap B$$

$$x \in A \cap B \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)$$

Evento que consiste en los elementos que están en A y en B.



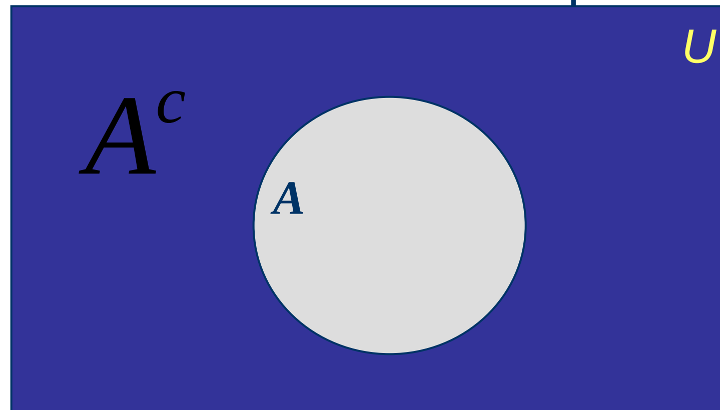
Operaciones entre conjuntos

- Complemento.

$$A^c \qquad \text{O también} \qquad A'$$

$$x \in A^c \equiv (x \in U) \wedge (x \notin A)$$

Evento que consiste en los elementos que NO están en A.



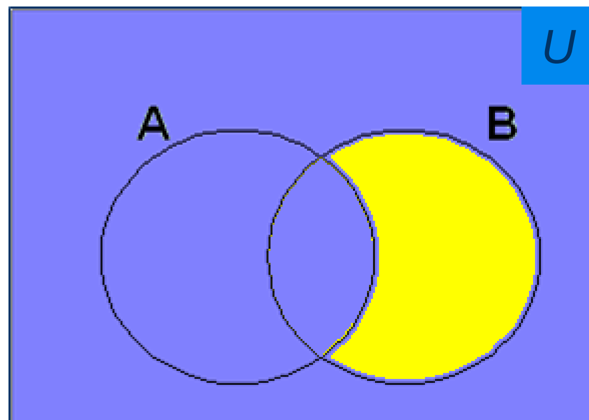
Operaciones entre conjuntos

- Diferencia.

$$B - A$$

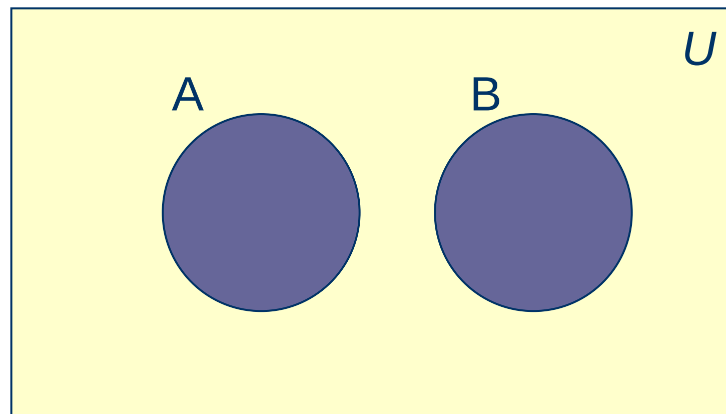
$$x \in A - B \equiv (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

Evento que consiste en los elementos que están en B y NO en A.



Conjuntos mutuamente excluyentes

A y B son mutuamente excluyentes si no tienen ningún elemento en común.

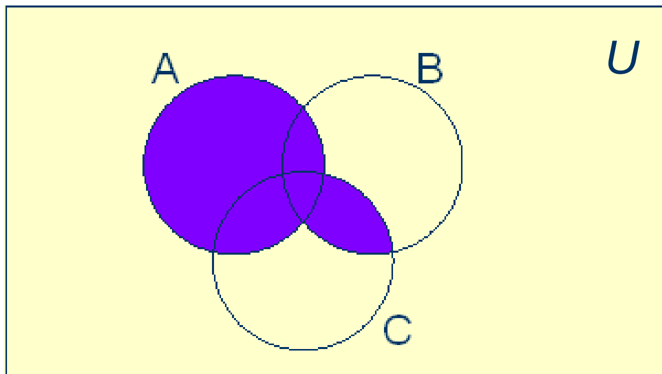


Teoría de conjuntos

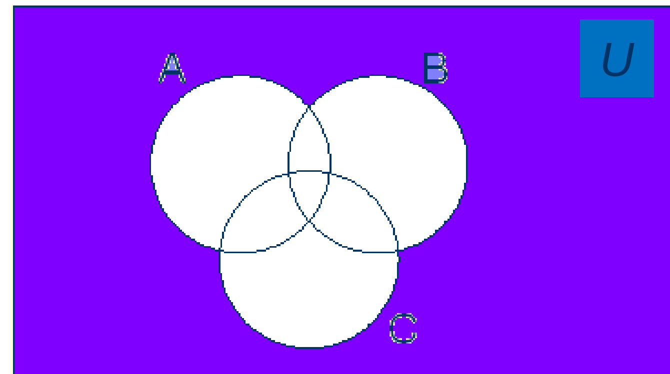
Ejemplos:

Representar en Diagrama de Venn

$A \cup (B \cap C)$



$A^c \cap B^c \cap C^c$



Teoría de conjuntos

Ejercicio 1

U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A = Números primos = { 2, 3, 5, 7}

B = Números pares = { 2, 4, 6, 8, 10}

Determinar los siguientes eventos.

- $A \cup B$
- A^c
- $A^c \cup B^c$

Ejercicio 2

Representar en diagrama de Venn

- $(A \cap B)'$
- $(A \cup B)'$
- $A' \cup B'$
- $A' \cap B'$

Nota: El número 1 NO es primo (aunque hay quienes así lo consideran). El conjunto de los **números primos** es un subconjunto de los números naturales que engloba a todos los elementos de este conjunto que son divisibles exactamente tan sólo por si mismos y por la unidad (por convención, el 1 no se considera primo). Los veinte primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 y 71.

Teoría de Conjuntos

- Leyes de Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Ejercicio

Una agencia de autos vendió durante un año 180 unidades con las siguientes características:

57 tenían transmisión automática

77 tenían clima

45 tenían transmisión automática y clima

10 tenían transmisión automática pero no tenían ni clima ni estéreo

28 tenían transmisión automática y clima, pero no tenían estéreo

90 no tenían ninguna de las 3 características mencionadas

19 tenían clima y estéreo

¿Cuántas de estas unidades tenían estéreo?

R = 22